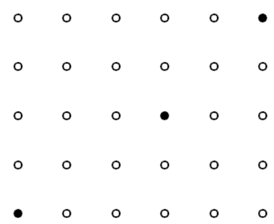
7 КЛАСС

Максимальное время выполнения заданий: 240 мин.
Все задания по 7 баллов

1.Все горизонтальные и вертикальные расстояния между соседними точками равны 1 (см. рисунок). Чему равна площадь треугольника с вершинами в чёрных точках?



2. У 1009 гномов было 2017 карточек, пронумерованных от 1 до 2017.У Ори была одна карточка, у каждого из остальных гномов – по две. Все гномы знали числа только на своих карточках. Каждый гном, кроме Ори, сказал: «Я точно знаю, что не могу отдатьОри никакую из своих карточек так, чтобы сумма чисел на его двух карточках стала равна 2018». Какое число на карточке у Ори?

3. Разрежьте квадрат 6×6(см. рисунок) по линиям сетки на 4 равные части так, чтобы в каждой встречались все цифры. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно только поворачивать.

2	9	9	8	7	3
6	2	4	4	3	6
7	5	1	1	5	6
8	5	1	1	5	9
8	3	4	4	2	8
3	9	6	7	7	2

4. Ваня записал четырёхзначное число, вычел из него двузначное число, результат умножил на двузначное число, поделил на сумму двух однозначных чисел, прибавил однозначное, результат поделил на сумму трёх однозначных чисел. Для записи всех чисел он использовал только одну цифру (не 0). В ответе Ваня получил целое число. Какое это число, и какую цифру мог использовать Ваня?

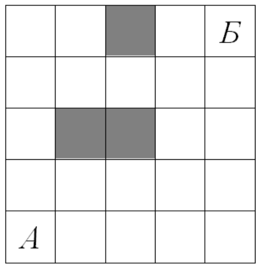
5. Великанам приготовили 813бургеров, среди которых чизбургеры, гамбургеры, фишбургеры и чикенбургеры. Если трое из них примутся есть чизбургеры, то за это время двое великанов съедят все гамбургеры. Если пятеро возьмутсяесть гамбургеры, то за это время шесть великанов съедят все фишбургеры. Если семеро станут есть фишбургеры, то за это время один великан может съесть все чикенбургеры. Сколько бургеров каждого вида было приготовлено великанам? (Время, за которое один великан съедает один бургер, не зависит от вида бургера, и все великаны едят с одной и той же скоростью.)

8 КЛАСС

Максимальное время выполнения заданий: 240 мин.
Все задания по 7 баллов

1. Вася утверждает, что нарисовал прямоугольник на клетчатой бумаге, который можно разрезать по сторонам клеток на одну полоску 1×37 клеток и 135 трёхклеточных уголков. Прав ли Вася?

2. Катя начертила мелом на асфальте фигуру (см. рисунок) и прыгает на одной ножке из клетки в клетку. Ей надо допрыгать из клеткиА в клетку Б. За один прыжок она может передвинуться либо на одну клетку вправо, либо вперёд, либо на одну клетку по диагонали – вправо и вперёд. В закрашенных клетках лужи, и туда Катя не может прыгать. Сколькими различными путями Катя может попасть из А в Б?



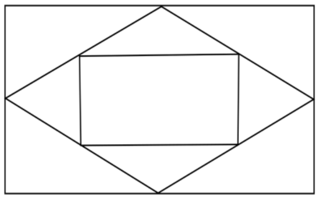
3. Числа $1, 2, 3, \ldots, 29, 30$ записали в ряд в произвольном порядке, и посчитали частичные суммы: первая сумма S_1 равняется первому числу, вторая сумма S_2 равняется сумме первого и второго чисел, S_3 равняется сумме первого, второго и третьего чисел, и т.д. Последняя сумма S_{30} равняется сумме всех чисел. Каково наибольшее возможное количество нечётных чисел среди сумм $S_1, S_2, \ldots, S_{30}$?

4. На доске записано трёхзначное число, в записи которого нет нулей.Сумма всех различных чисел, которые получаются перестановками цифр из написанного числа,равна 2775.Какое число могло быть записано на доске?

5. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. В треугольниках AKB и AKC проведены биссектрисы KM и KP соответственно. Оказалось, что треугольники BMK и PMK равны. Докажите, что точка M делит AB пополам.

9 КЛАСС

Максимальное время выполнения заданий: 240 мин.
Все задания по 7 баллов



1. Середины соседних сторон прямоугольника с периметром 32 соединили отрезками. С полученным четырёхугольником проделали ту же операцию: середины соседних сторон соединили отрезками (см. рисунок). Сколько всего раз надо сделать такую операцию, чтобы периметр полученного четырёхугольника впервые стал бы меньше 1?

2. Вася расставляет натуральные числа от 1 до 10 в произведение $a^b b^c c^d d^e e^f f^g g^k k^l l^m m^a$ (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами – разные цифры). На какую наибольшую степень двойки может делиться это произведение?

3. Прямая l пересекает график функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс – в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $x_1 + x_2 = x_3$.

4. В одну из вершин шестиугольника Скрудж МакДак положил золотую монетку, а в остальных вершинах ничего нет. Каждый день он убирает с одной из вершин шестиугольника произвольное количество монеток и тут же кладёт на соседнюю вершину в шесть раз больше монеток. Если в какой-то день Скрудж МакДак сможет добиться того, что во всех вершинах шестиугольника одинаковое число монеток, то ему будет присвоено звание «Великий Селезень». Сможет ли Скрудж МакДак получить это звание?

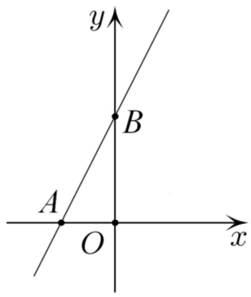
5. Полуокружность с диаметром AB и центром в точке O разделена точками C и D на три части так, что точка C лежит на дуге AD. Из точки D на отрезки OC и AB опущены перпендикуляры DE и DF соответственно. Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC, а DO – биссектриса треугольника ADF. Найдите угол CAD.

10 КЛАСС

Максимальное время выполнения заданий: 240 мин.
Все задания по 7 баллов

1. Может ли сумма 2017 последовательных натуральных чисел быть 2017-й степенью натурального числа?

2. График линейной функции $y = kx + k + 1$ $(k > 0)$ пересекает ось Ox в точке A, ось Oy – в точке B (см. рисунок). Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника ABO.



3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Известно, что центр описанной окружности треугольника ABC совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник BCD. Найдите углы треугольника ABC.

4. Найдите все натуральные n, для которых верны оба утверждения:
1) наибольший простой делитель числа n равен $\sqrt{n}$,

2) наибольший простой делитель числа $(n + 72)$ равен $\sqrt{n + 72}$.

5. На доске написано число 24. Лёша и Витя ходят по очереди, изменяя число: либо дописав одну цифру в конец, либо стерев последнюю цифру предыдущего числа, либо переставив любым образом цифры предыдущего числа (число не может начинаться с нуля). Оставлять число без изменения нельзя, но можно повторять то, что было раньше. Первым ходом Лёша должен получить число кратное 2, затем Витя – кратное 3, Лёша – кратное 4 и т.д. Кто не сможет сделать ход – проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

11 КЛАСС

Максимальное время выполнения заданий: 240 мин.
Все задания по 7 баллов

1. На доске записаны натуральные числа от 1 до n, кратного 50. Вася утверждает, что если стереть с доски все числа, которые делятся на 50, то сумма оставшихся чисел является квадратом некоторого натурального числа. Прав ли Вася?

2. Найдите все целые решения уравнения $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены две высоты AD и CE. На прямую DE из точек A и C опустили перпендикуляры AM и CN. Докажите, что $ME = DN$.

4. Гномы Глоин, Оин и Траин нашли 70 одинаковых драгоценных камней и хотят разделить их между собой так, что каждый из них получит не менее 10 камней. Сколькими способами гномы смогут это сделать?

5. Для каких натуральных чисел $n \geq 3$ можно за конечное количество шагов из набора чисел $1, 2, \dots, n$ получить набор из n одинаковых чисел, если за один шаг можно выбирать два произвольных числа и увеличивать каждое из них на произвольное одинаковое натуральное число?

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2017-2018 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

7 КЛАСС

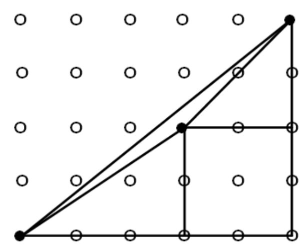
Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. Все горизонтальные и вертикальные расстояния между соседними точками равны 1. Чему равна площадь треугольника с вершинами в чёрных точках?

Ответ. 1.



Решение. Площадь треугольника можно найти, например, вычитая из половины площади квадрата площадь квадрата и площади двух прямоугольных треугольников. Получаем $S = 10 - 4 - 2 - 3 = 1$. Можно разбивать фигуру и другими способами.

Комментарий. *Ответ без обоснования – 0 баллов. Сделано разбиение, позволяющее найти площадь, но вычисления отсутствуют – 2 балла. При правильном методе решения есть ошибки в вычислениях – снимать по 2 балла за* *каждую ошибку.*

2. У 1009 гномов было 2017 карточек, пронумерованных от 1 до 2017. У Ори была одна карточка, у каждого из остальных гномов – по две. Все гномы знали числа только на своих карточках. Каждый гном, кроме Ори, сказал: «Я точно знаю, что не могу отдать Ори никакую из своих карточек так, чтобы сумма чисел на его двух карточках стала равна 2018». Какое число на карточке у Ори?

Ответ. 1009.

Решение.Если у одного из гномов есть карточка с числом 1, то он должен быть уверен, что у Ори нет карточки с числом 2017. В этом можно быть уверенным только тогда, когда карточка с числом 2017 тоже в руках у этого гнома. Точно так же, гном с карточкой, на которой написано число 2, имеет ещё и карточку с числом 2016, с карточкой, на которой стоит число 3, – ещё и карточку с числом 2015, и т. д. Все карточки у гномов разобьются на пары с суммой 2018. Но на такие пары разбиваются все карточки, кроме карточки с числом 1009. Именно она у Ори.

Комментарий. *Доказано, что у некоторых гномов карточки разбиваются на пары с суммой 2018– 3 балла. Доказано, что все карточки у гномов разобьются на пары с суммой 2018, но ответ не найден – 5 баллов.*

3. Разрежьте квадрат 6×6(см. рисунок)по линиям сетки на 4 равные части так, чтобы в каждой встречались все цифры. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно только поворачивать.

2	9	9	8	7	3
6	2	4	4	3	6
7	5	1	1	5	6
8	5	1	1	5	9
8	3	4	4	2	8
3	9	6	7	7	2

Решение. См. рисунок.

2	9	9	8	7	3
6	2	4	4	3	6
7	5	1	1	5	6
8	5	1	1	5	9
8	3	4	4	2	8
3	9	6	7	7	2

Комментарий. *Приведен верный пример – 7 баллов. Верный рисунок является достаточным обоснованием ответа, за отсутствие текстовых пояснений баллы не снимать.*

4. Ваня записал четырёхзначное число, вычел из него двузначное число, результат умножил на двузначное число, поделил на сумму двух однозначных чисел, прибавил однозначное, результат поделил на сумму трёх однозначных чисел. Для записи всех чисел он использовал только одну цифру (не 0). В ответе Ваня получил целое число. Какое это число, и какую цифру мог использовать Ваня?

Ответ. 2017; цифра любая.

Решение. Обозначим цифру a. Получаем $\left(\frac{(\overline{aaaa}-\overline{aa})\cdot\overline{aa}}{a+a}+a\right):(a+a+a)$. Тогда

$$\overline{aaaa}-\overline{aa}=\overline{aa00}=a\cdot 1100 \quad\Rightarrow \overline{aa}=a\cdot 11.$$

Числитель дроби равен $a\cdot 1100\cdot a\cdot 11=\ a\cdot a\cdot 12100.$ Дробь $\frac{(\overline{aaaa}-\overline{aa})\cdot\overline{aa}}{a+a}=a\cdot 6050.$ Тогда выражение $\frac{(\overline{aaaa}-\overline{aa})\cdot\overline{aa}}{a+a}+a=6051\ a.$ Поделив на $3a$, получаем 2017, и это верно при любой цифре $a\neq 0$.

Комментарий. *Найдено число для одной какой-нибудь цифры, которая и указывается в ответе – 2 балла. Найдено число для нескольких (но не всех) цифр, которые и указываются в ответе – 3-4 балла. Найдено число для нескольких (но не всех) цифр, и сделан, но не доказан вывод о том, что цифра любая – 5 баллов. Найдено число для любой цифры (в общем виде или полным перебором) – 7 баллов. При отсутствии решения за полезные продвижения – 1 балл.*

5. Великанам приготовили 813 бургеров, среди которых чизбургеры, гамбургеры, фишбургеры и чикенбургеры. Если трое из них примутся есть чизбургеры, то за это время двое великанов съедят все гамбургеры. Если пятеро возьмутся есть гамбургеры, то за это время шесть великанов съедят все фишбургеры. Если семеро станут есть фишбургеры, то за это время один великан может съесть все чикенбургеры. Сколько бургеров каждого вида было приготовлено великанам? (Время, за которое один великан съедает один бургер, не зависит от вида бургера, и все великаны едят с одной и той же скоростью.)

Ответ. 252 фишбургера, 36 чикенбургеров, 210 гамбургеров и 315 чизбургеров.

Решение. Пусть a, b, c и d – соответственно количества чизбургеров, гамбургеров, фишбургеров и чикенбургеров. По условию $a+b+c+d=813$. Утверждение, что пока трое едят чизбургеры, двое съедят все гамбургеры означает, что $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$. Аналогично выполняются равенства $\frac{b}{5}=\frac{c}{6}$ и $\frac{c}{7}=d$. Выразим все неизвестные через одну, например, через c. Имеем $d=\frac{c}{7}$, $b=\frac{5c}{6}$ и $a=\frac{3b}{2}=\frac{5c}{4}$. Тогда $\frac{5c}{4}+\frac{5c}{6}+c+\frac{c}{7}=813$, откуда $c=252$. Тогда $d=36$, $b=210$ и $a=315$.

Комментарий. *Ответ найден подбором и не показано, что нет других решений – 3 балла. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 1-3 балла.*

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2017-2018 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

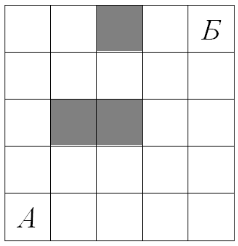
Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. Вася утверждает, что нарисовал прямоугольник на клетчатой бумаге, который можно разрезать по сторонам клеток на одну полоску 1×37 клеток и 135 трёхклеточных уголков. Прав ли Вася?

Ответ. Вася не прав.

Решение. Если бы такой прямоугольник существовал, его площадь составляла бы $37 + 135 \cdot 3 = 442$ клетки. Чтобы из прямоугольника можно было вырезать полоску 1×37, одна из его сторон должна быть не короче 37. Так как $442 = 2 \times 13 \times 17$, нам подойдут только прямоугольники 1×442 и 2×221. Но из первого нельзя вырезать ни одного уголка, а у второго участок, из которого нельзя вырезать ни одного уголка, образуется после вырезания полоски 1×37.

Комментарий. *Ответ без обоснования – 0 баллов. Найдена площадь нарисованного прямоугольника – 1 балл. Рассмотрены некоторые конкретные примеры прямоугольников – не более 3 баллов.*



2. Катя начертила мелом на асфальте фигуру (см. рисунок) и прыгает на одной ножке из клетки в клетку. Ей надо допрыгать из клетки А в клетку Б. За один прыжок она может передвинуться либо на одну клетку вправо, либо вперёд, либо на одну клетку по диагонали – вправо и вперёд. В закрашенных клетках лужи, и туда Катя не может прыгать. Сколькими различными путями Катя может попасть из А в Б?

Ответ. 84.

Решение. В каждой клетке запишем число, равное количеству разных путей для попадания в эту клетку. Для этого надо прибавить аналогичные числа соседних (снизу, слева и по диагонали) клеток. В клетку Б ведут $16 + 14 + 54 = 84$ пути.

1	4		16	Б
1	2	2	14	54
1			12	28
1	3	5	7	9
А	1	1	1	1

Комментарий. *Обоснованно найдено верное число путей – 7 баллов. При правильном методе решения есть ошибки в вычислениях – снимать по 1 баллу за каждую ошибку. Учтена только часть путей – максимум 3 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

3. Числа $1, 2, 3, \ldots, 29, 30$ записали в ряд в произвольном порядке, и посчитали частичные суммы: первая сумма S_1 равняется первому числу, вторая сумма S_2 равняется сумме первого и второго чисел, S_3 равняется сумме первого, второго и третьего чисел, и т.д. Последняя сумма S_{30} равняется сумме всех чисел. Каково наибольшее возможное количество нечётных чисел среди сумм $S_1, S_2, \ldots, S_{30}$?

Ответ. 23.

Решение. Оценка: прибавление нечётного числа меняет чётность суммы, нечётных чисел 15, следовательно, чётность сумм меняется не менее 14 раз. Значит, будет не менее 7 чётных сумм, тем самым, не более 23 нечётных сумм.

Реализация: расположим числа так: 1, потом все чётные, потом все остальные нечётные (кроме 1). Получим ряд: $1, 2, 4, 6, \ldots, 30, 3, 5, \ldots 29$. Нечётными являются первая сумма (равная 1), последующие 15 (так как они образуются прибавлением к 1 чётного числа), и 7 из последних 14 сумм ($S_{18}, S_{20}, \ldots, S_{30}$). Всего нечётных сумм $1 + 15 + 7 = 23$.

Комментарий. *Предложена реализация* **–** *3 балла, сделана оценка* **–** *4 балла, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-3 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

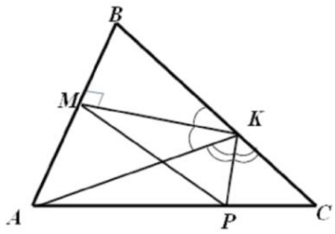
4. На доске записано трёхзначное число, в записи которого нет нулей. Сумма всех различных чисел, которые получаются перестановками цифр из написанного числа, равна 2775. Какое число могло быть записано на доске?

Ответ. 889, 988, 898, $997, 799, 979$.

Решение. Число на доске не могло записываться тремя одинаковыми цифрами, ведь тогда на доске записано 2775, которое не является трехзначным. Но тремя различными цифрами оно тоже не могло записываться, так как тогда каждая цифра в разряде единиц входила бы в два числа, и сумма получилась бы чётной. Значит, исходное число записывается двумя различными цифрами a и b, что приводит к равенству $\overline{aab}+\overline{aba}+\overline{baa}=2775$. При сложении этих чисел мы получаем $2a+b$ единиц, $2a+b$ десятков и $2a+b$ сотен. Поэтому $(2a+b)(100+10+1)=2775$. Следовательно, $2a+b=25$. Поэтому на доске могли быть записаны числа с суммой цифр 25, то есть 889 или 997 и, соответственно, все числа, полученные из них перестановкой цифр.

Комментарий. *Доказано, что число не может записываться тремя различными цифрами – 1 балл. Доказано, что 2a+b=25 – 5 баллов. При верном решении найден только один набор цифр (889 или 997) – 6 баллов. При верном решении упущены некоторые перестановки чисел 889 и 997– 7 баллов. Без объяснения отброшен случай, когда число записывается тремя одинаковыми цифрами – снять 1 балл. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-3 балла.*

5. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. В треугольниках AKB и AKC проведены биссектрисы KM и KP соответственно. Оказалось, что треугольники BMK и PMK равны. Докажите, что точка M делит AB пополам.



Решение. Прямые KM и KP перпендикулярны, как биссектрисы смежных углов. Поэтому треугольник BMK тоже прямоугольный. Но угол BKM острый, и, если бы прямым был угол KBM, выполнялось бы равенство отрезков $MK=MP$. Но один из этих отрезков катет, а другой – гипотенуза прямоугольного треугольника KMP. Значит, прямым является угол BMK, и в треугольнике ABK высота является биссектрисой, а, значит, и медианой.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов.*

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2017-2018 УЧЕБНЫЙ ГОД

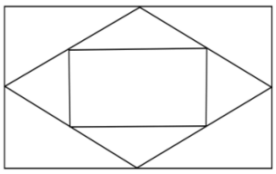
ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

9 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

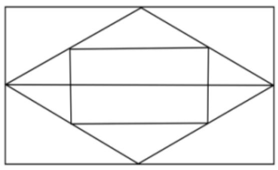
Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.



1. Середины соседних сторон прямоугольника с периметром 32 соединили отрезками. С полученным четырёхугольником проделали ту же операцию: середины соседних сторон соединили отрезками (см. рисунок). Сколько всего раз надо сделать такую операцию, чтобы периметр полученного четырёхугольника впервые стал бы меньше 1?

Ответ. 11.



Решение. После двух операций получается четырёхугольник, стороны которого являются средними линиями треугольников с основаниями, параллельными сторонам исходного прямоугольника. Поэтому этот четырёхугольник является прямоугольником, причем каждая его сторона в 2 раза меньше соответствующей стороны исходного прямоугольника. Таким образом, за 2 операции периметр уменьшается вдвое. После 5 пар операций периметр уменьшится в $2^5 = 32$ раз и станет равным 1. Из неравенства треугольника очевидно, что периметр уменьшается при каждой операции. Поэтому после 11 операций периметр станет меньше 1.

Комментарий. *Рассмотрен частный случай (например, вычисления произведены для прямоугольника со сторонами, заданными конкретными числами), но метод вычислений может быть применен к произвольному прямоугольнику – 4 балла; метод применим только к прямоугольникам определенного вида – 1-2 балла. Если при подсчёте числа операций не учли первые две, снять 1 балл. Если не доказано, что периметр уменьшается при каждой операции, снять 1 балл.*

2. Вася расставляет натуральные числа от 1 до 10 в произведение $a^b b^c c^d d^e e^f f^g g^k k^l l^m m^a$ (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами – разные цифры). На какую наибольшую степень двойки может делиться это произведение?

Ответ: 2^{69}.

Решение. Понятно, что в наибольшей возможной степени (10) должна стоять цифра $8 = 2^3$. В степени 9 должна стоять только $4 = 2^2$, остальные чётные цифры должны стоять в степенях 8, 7 и 6. Тогда произведение будет делиться на степень двойки, равную $3 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 8 + 7 + 6 = 69$. В то же время такой вариант вполне возможен, пример $2^8 \cdot 8^{10} \cdot 10^6 \cdot 6^7 \cdot 7^4 \cdot 4^9 \cdot 9^1 \cdot 1^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$.

Комментарий. *Определено, что в наибольшей возможной степени должна стоять цифра 8 – 1 балл. Определены показатели степени у 8, 4, 2, 6, 10 – 4 балла. Найден и обоснован верный ответ о степени двойки – 5 баллов. Приведен пример числа – еще 2 балла.*

3. Прямая l пересекает график функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс – в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $x_1 + x_2 = x_3$.

Решение. Прямая, очевидно, не вертикальная, так как иначе она пересекла бы гиперболу только в одной точке. Пусть уравнение прямой $y = tx + b$. Тогда $0 = tx_3 + b$, откуда $b = -tx_3$ и уравнение прямой имеет вид $y = tx - tx_3$. Чтобы найти координаты точек пересечения прямой и заданной гиперболы достаточно решить систему $\begin{cases} y = \frac{k}{x}, \\ y = tx - tx_3. \end{cases}$ Подставим значение из первого уравнения системы во второе. Второе уравнение примет вид $\frac{k}{x} = tx - tx_3$ или $tx^2 - tx_3x - k = 0$. Полученное квадратное уравнение должно иметь два корня x_1 и x_2. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{-tx_3}{t} = x_3$.

Комментарий. *Составлена система – 2 балла. Получено квадратное уравнение – 4 балла. Полное решение – 7 баллов. При отсутствии решения за полезные идеи и продвижения – 2 балла. Если не оговорен случай вертикальной прямой, баллы не снимать.*

4. В одну из вершин шестиугольника Скрудж МакДак положил золотую монетку, а в остальных вершинах ничего нет. Каждый день он убирает с одной из вершин шестиугольника произвольное количество монеток и тут же кладёт на соседнюю вершину в шесть раз больше монеток. Если в какой-то день Скрудж МакДак сможет добиться того, что во всех вершинах шестиугольника одинаковое число монеток, то ему будет присвоено звание «Великий Селезень». Сможет ли Скрудж МакДак получить это звание?

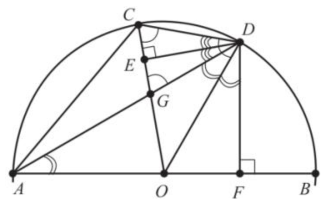
Ответ. Не сможет.

Решение. Занумеруем вершины шестиугольника, начиная с той, где лежит монетка, последовательными натуральными числами от 1 до 6 (двигаясь, например, против часовой стрелки). Обозначим через $n_1, n_2, \dots, n_6$ – количества монеток, лежащих в вершинах $1, 2, \dots, 6$ соответственно. Пусть $N_1 = n_1 + n_3 + n_5$, $N_2 = n_2 + n_4 + n_6$. Рассмотрим разность $N_1 - N_2$ и докажем, что при указанных действиях Скруджа МакДака остаток от ее деления на 7 не изменяется. Действительно, если из какой-то вершины шестиугольника Скрудж МакДак забирает x монеток, а в соседнюю вершину добавляет $6x$ монеток, то значение $N_1 - N_2$ изменяется на $7x$. Заметим, что в начальный момент $N_1 - N_2 = 1$. Поэтому цель Скруджа МакДака – уравнять количество монеток во всех вершинах, а значит сделать так, чтобы $N_1 - N_2$ было равно нулю, – недостижима.

Комментарий. *Ответ без обоснования – 0 баллов. Верно найден инвариант (в данном решении это* $N_1 - N_2$*), но решение не доведено до конца – 5 баллов. Полное обоснованное решение – 7 баллов.*

5. Полуокружность с диаметром AB и центром в точке O разделена точками C и D на три части так, что точка C лежит на дуге AD. Из точки D на отрезки OC и AB опущены перпендикуляры DE и DF соответственно. Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC, а DO – биссектриса треугольника ADF. Найдите угол CAD.

Ответ: 20°.



Решение. Треугольник AOD равнобедренный ($OD = OA$, как радиусы), значит, $\angle OAD = \angle ODA$. Поскольку DO – биссектриса угла ADF, то $\angle OAD = \angle ODF$. Подсчёт углов в прямоугольном треугольнике AFD показывает, что $\angle OAD = 30^\circ$. Обозначим за G точку пересечения отрезков AD и OC. Отрезок DE является высотой и биссектрисой в треугольнике DGC; тогда этот треугольник равнобедренный с углом ECD при основании. Треугольник OCD также является равнобедренным с углом ECD при основании, следовательно, углы при вершинах этих двух треугольников также будут равны, т. е. $\angle CDG = \angle COD$. Пусть $\angle CDG = \angle COD = a$, тогда $\angle GCD = \angle ODC = 30^\circ + a$. Подсчитав сумму углов треугольника COD, получим, что $a = 40^\circ$. Искомый угол CAD вписанный и опирается на ту же дугу, что и центральный угол DOC, поэтому $\angle CAD = 20°$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Найдено только значение ∠OAD – 2 балла.*

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2017-2018 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

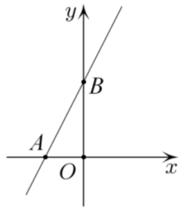
1. Может ли сумма 2017 последовательных натуральных чисел быть 2017-й степенью натурального числа?

Ответ. Да.

Решение. Сумма 2017 последовательных натуральных чисел равна $n+(n+1)+\cdots+(n+2016)=2017n+\frac{2016\cdot 2017}{2}=2017\cdot(n+1008)$. Если $n+1008=2017^{2016}$, то сумма равна 2017-й степени числа 2017, и условие выполнено (при $n=2017^{2016}-1008$).

Комментарий. *При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 1-2 балла. За непринципиальные вычислительные ошибки снимать по баллу за ошибку. Если при верном подходе ошибка в вычислении не позволила получить положительный ответ – 3 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

2. График линейной функции $y = kx + k + 1$ $(k > 0)$ пересекает ось Ox в точке A, ось Oy – в точке B (см. рисунок). Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника ABO.



Ответ. 2.

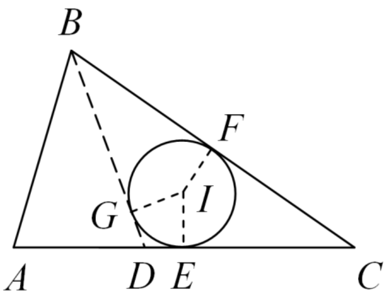
Решение. Абсцисса точки A пересечения с осью Ox: $0 = kx + k + 1$; $x = -\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Ордината точки B пересечения с осью Oy: $y = k \cdot 0 + k + 1$; $y = k + 1$. Следовательно, $S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2}(k+1)\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + k + \frac{1}{k}\right)$. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $k + \frac{1}{k} \geq 2$, причем равенство достигается при $k = 1$, поэтому и наименьшее значение S_{ABO} достигается при $k = 1$. Таким образом, наименьшая возможная площадь треугольника ABO равна 2.

Комментарий. *Верный ответ найден на основании рассмотрения примера, и не доказана его минимальность – 1 балл. Найдено выражение площади треугольника через k – 5 баллов. При верной логике рассуждений в преобразованиях допущены ошибки, не позволившие получить верный ответ – 4 балла. Утверждение о том, что наименьшее значение выражения $k + \frac{1}{k}$ достигается при $k = 1$ можно использовать без доказательства.*

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Известно, что центр описанной окружности треугольника ABC совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник BCD. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ. $\angle C = 36°, \angle A = \angle B = 72°$.

Решение. Обозначим общий центр кругов через I, а точки соприкосновения вписанного в треугольник BCD круга со сторонами CD, BC и BD через E, F, G соответственно (см. рис.). Отрезки IE и IF – серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC соответственно, а потому $AE = CE, BF = CF$. Из свойств касательных к окружности $BG = BF, DG = DE, CE = CF$, поэтому $BD = BG + GD = BF + GD = FC + DE = EC + DE = CD$. Кроме этого, $BC = 2CF = 2CE = AC$. Таким образом, треугольники BDC и ACB равнобедренные. Обозначим $\angle BCA = \alpha$, тогда $\angle CBD = \angle ABD = \alpha, \angle CBA = 2\alpha, \angle CAB = \angle CBA = 2\alpha$. Таким образом, треугольник ABC имеет углы $\alpha, 2\alpha, 2\alpha$, откуда находим α:



$5\alpha = 180°, \alpha = 36°$.

Комментарий. *Установлено, что треугольники BDC и ACB равнобедренные – 6 баллов. При отсутствии решения за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1–3 балла.*

4. Найдите все натуральные n, для которых верны оба утверждения:

1) наибольший простой делитель числа n равен $\sqrt{n}$,

2) наибольший простой делитель числа $(n + 72)$ равен $\sqrt{n + 72}$.

Ответ. 49 и 289.

Решение. Обозначим упомянутые простые делители p_1 и p_2. Тогда $n = p_1^2$, $n + 72 = p_2^2$, откуда $(p_2 + p_1)(p_2 - p_1) = 72$. Рассмотрим разложения числа 72 на натуральные множители: $72 = m \cdot k$ $(m > k)$. Тогда $p_1 = \frac{m-k}{2}$, $p_2 = \frac{m+k}{2}$.

1) $m = 72$, $k = 1$: p_1 не целое, противоречие.

2) $m = 36$, $k = 2$: $p_1 = 17$, $p_2 = 19$.

3) $m = 24,\ k = 3$: p_1 не целое, противоречие.

4) $m = 18,\ k = 4$: $p_1 = 7,\ p_2 = 11$.

5) $m = 12,\ k = 6$: $p_1 = 3,\ p_2 = 9,\ p_2$ не является простым, противоречие.

6) $m = 9,\ k = 8$: p_1 не целое, противоречие.

Подходят пары $p_1 = 17, p_2 = 19$ и $p_1 = 7, p_2 = 11$. Поскольку $n = p_1^2$, то искомые числа 49 и 289.

Комментарий. *Полный ответ найден подбором, и не доказано, что нет других подходящих натуральных чисел – 3 балла. Подбором найден только один ответ – 1 балл. При правильных рассуждениях упущены некоторые случаи – до 5 баллов.*

5. На доске написано число 24. Лёша и Витя ходят по очереди, изменяя число: либо дописав одну цифру в конец, либо стерев последнюю цифру предыдущего числа, либо переставив любым образом цифры предыдущего числа (число не может начинаться с нуля). Оставлять число без изменения нельзя, но можно повторять то, что было раньше. Первым ходом Лёша должен получить число кратное 2, затем Витя – кратное 3, Лёша – кратное 4 и т.д. Кто не сможет сделать ход – проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: выиграет Лёша.

Решение. Выиграет Лёша. Второе число он получает, дописав в конце 0. Теперь на доске записано 240. Далее, если Витя своим ходом превратил число 240 в число B, Лёша снова превращает B в 240. Это не противоречит правилам, поскольку число 240 делится на 4, 6, 8, 10, 12. Для получения 13-го числа Витя вынужден дописать в конец 5 (так как 204, 402 и 420 не делятся на 13), после чего Лёша переставляет цифры и получает 2450 (оно, очевидно, делится на 14). Витя должен добиться делимости на 15, но это невозможно: сумма цифр числа 2450 не делится на 3, поэтому перестановка не поможет. Стирание последней цифры и дописывание нуля не меняют сумму цифр. Дописывание 5 также приводит к числу, не делящемуся на 3. Дописывание другой цифры в конец приводит к числу, не делящемуся на 5.

Комментарий. *Ответ без обоснования – 0 баллов. Верный ответ, полученный с помощью примеров (не указана оптимальная стратегия) – 1 балл. Оптимальная стратегия Лёши указана, но не обоснована – до 4 баллов. При отсутствии доказательства за потенциально полезные идеи 1–2 балла.*

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2017-2018 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. На доске записаны натуральные числа от 1 до n, кратного 50. Вася утверждает, что если стереть с доски все числа, которые делятся на 50, то сумма оставшихся чисел является квадратом некоторого натурального числа. Прав ли Вася?

Ответ. Вася прав.

Решение. Пусть $n = 50m$. Тогда сумма оставшихся чисел равна

$$(1+2+\cdots+50m)-50(1+2+\cdots+m) = 25m(50m+1) - 25m(m+1) = 25\cdot 49m^2 = (35m)^2.$$

Комментарий. *Верный ответ получен на основании рассмотрения частных случаев – 2 балла. При верном подходе допущены вычислительные ошибки – 3 балла. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 1-2 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

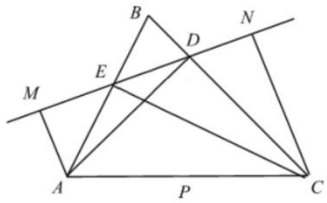
2. Найдите все целые решения уравнения $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.

Ответ. $(0,2)$, $(3,5)$, $(4,7)$.

Решение. Заметим, что $x \geq 0$ (иначе y не целое). Если $x = 0$, то $y = 2$. Пусть x – натуральное, тогда y нечётное, обозначим $y = 2k + 1$. Получаем $3 \cdot 2^x + 1 = (2k+1)^2$, или $3 \cdot 2^x = 4k^2 + 4k$, откуда $3 \cdot 2^{x-2} = k(k+1)$. Поскольку k и $k+1$ взаимно просты, возможны случаи $k = 3, k+1 = 2^{x-2}$ или $k+1 = 3$, $k = 2^{x-2}$. Первый случай даёт ответ $x = 4, y = 7$, во втором случае $x = 3, y = 5$.

Комментарий. *Показано, что при x натуральном y нечётно – 1 балл. Если решения уравнения найдены подбором, и не доказано, что других нет – по 1 баллу за каждое найденное решение.*

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены две высоты AD и CE. На прямую DE из точек A и C опустили перпендикуляры AM и CN. Докажите, что $ME = DN$.



Решение. Так как $\angle ADC = \angle AEC$, то четырехугольник $AEDC$ – вписанный. По свойству вписанного четырехугольника $\angle NDC = \angle BAC = \alpha$, $\angle MEA = \angle BCA = \gamma$. Тогда, используя прямоугольные треугольники AME и AEC, получим: $ME = AE \cdot \cos\gamma = AC \cdot \cos\alpha \cdot \cos\gamma$. Аналогично, $DN = DC \cdot \cos\alpha = AC \cdot \cos\alpha \cdot \cos\gamma$.

Комментарий. *Доказано, что четырехугольник $AEDC$ вписанный – 2 балла. Найдены пары равных углов – еще 2 балла. При отсутствии решения за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-3 балла.*

4. Гномы Глоин, Оин и Траин нашли 70 одинаковых драгоценных камней и хотят разделить их между собой так, что каждый из них получит не менее 10 камней. Сколькими способами гномы смогут это сделать?

Ответ. 861.

Решение. Выдадим каждому гному по 9 камней, а оставшиеся 43 камня выложим в ряд. Чтобы разделить оставшиеся камни между гномами, достаточно расположить на 42 места между камнями два разделителя. Глоин получит камни левее первого разделителя, Оин – камни между двумя разделителями, а Траин – камни правее второго разделителя. Число способов расположить эти два разделителя равно $\frac{42 \cdot 41}{2} = 861$.

Комментарий. *За вычислительную ошибку при верных рассуждениях снижать на 1 балл. За потенциально полезные, но не реализованные идеи – 1-2 балла.*

5. Для каких натуральных чисел $n \geq 3$ можно за конечное количество шагов из набора чисел $1, 2, \ldots, n$ получить набор из n одинаковых чисел, если за один шаг можно выбирать два произвольных числа и увеличивать каждое из них на произвольное одинаковое натуральное число?

Ответ. Для всех $n \neq 4k + 2$.

Решение. Покажем, что для $n = 4k$ это возможно. В этом случае на доске выписан набор чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k.$$

Поступаем следующим образом: $(1; 3) \to (2; 4), (5; 7) \to (6; 8), \ldots, (4k-3; 4k-1) \to (4k-2; 4k)$.

Теперь на доске записаны все чётные числа, при этом каждое число встречается ровно два раза:

$$2, 2, 4, 4, 6, 6, \ldots, 4k-2, 4k-2, 4k, 4k.$$

Далее все одинаковые числа объединяем в пары и приводим к виду $(4k; 4k)$.

Для $n = 2k + 1$ это также возможно. В этом случае на доске выписан набор чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, 2k-2, 2k-1, 2k, 2k+1.$$

Первый шаг: $(1; 2k+1) \to (2; 2k+2)$, тогда на доске записаны числа:

$$2, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 2k-2, 2k-1, 2k, 2k+2.$$

Второй шаг: $(3; 2k+2) \to (4; 2k+3)$, тогда на доске записаны числа:

$$2, 2, 4, 4, 5, 6, \dots, 2k-2, 2k-1, 2k, 2k+3.$$

Третий шаг: $(5; 2k+3) \to (6; 2k+4)$, тогда на доске записаны числа:

$$2, 2, 4, 4, 6, 6, \dots, 2k-2, 2k-1, 2k, 2k+4.$$

Тогда после -ого такого шага имеем на доске числа:

$$2, 2, 4, 4, 6, 6, \dots, 2k-2, 2k-2, 2k, 2k, 3k+1.$$

Таким образом, на доске записаны все чётные числа, меньшие $2k+1$. При этом каждое число встречается ровно дважды. А также записано число $3k+1$. Далее все одинаковые числа объединяем в пары и приводим к виду $(3k+1; 3k+1)$.

Докажем методом от противного, что для $n = 4k+2$ это невозможно. Сумма чисел с самого начала нечётная: $1 + 2 + \cdots + 4k + 2 = \frac{1}{2}(4k+2)(4k+3) = (2k+1)(4k+3)$. Каждый раз сумму всех чисел мы увеличиваем на чётное число, но в конце все числа должны стать одинаковыми, то есть их сумма будет чётной. Полученное противоречие завершает доказательство.

Комментарий. *7 баллов за полное решение задачи данным способом можно разложить следующим образом: рассмотрен один из случаев $n = 4k$ или $n = 2k+1$ – 2 балла, рассмотрены оба этих случая – 5 баллов. Рассмотрен случай $n = 4k+2$ – еще 2 балла. При отсутствии решения за рассмотрение примеров – 1-2 балла.*